

Exame Final Nacional de Matemática A
Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2024
12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

8 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As citações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u v)' = u' v + u v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

* 1. Seja f uma função de domínio \mathbb{R} e contradomínio $[-1, 3]$.

Qual é o contradomínio da função g , de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = f(x - 2) + 1$?

(A) $[-3, 1]$

(B) $[-2, 2]$

(C) $[0, 4]$

(D) $[1, 5]$

2. Uma orquestra está a realizar audições para novos instrumentistas.

* 2.1. No primeiro dia das audições, participaram apenas candidatos a flautistas e a violinistas.

Sabe-se que:

- $\frac{3}{5}$ dos candidatos eram violinistas;
- o número de candidatos estrangeiros era igual ao número de candidatos portugueses;
- $\frac{3}{10}$ dos candidatos estrangeiros eram flautistas.

Seleciona-se, ao acaso, um dos candidatos que participaram no primeiro dia das audições.

Determine a probabilidade de esse candidato ser português, sabendo-se que é violinista.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

* 2.2. Enquanto aguardam as audições, quatro violinistas, um violoncelista e três contrabaixistas vão sentar-se nas duas primeiras filas de uma plateia, tendo cada fila quatro lugares numerados de 1 a 4.

Qual das expressões seguintes representa o número de maneiras diferentes de dispor os oito músicos, ficando os três contrabaixistas numa fila?

(A) ${}^4C_3 \times 3! \times 5!$

(B) $2 \times {}^4A_3 \times 5!$

(C) $2 \times {}^4C_3 \times 5!$

(D) ${}^4A_3 \times 3 \times 5!$

2.3. Para se preparar para a audição de violino, a Constança praticou durante m dias.

Sabe-se que a Constança praticou:

- em cada dia, exceto no primeiro, sempre mais 10 minutos do que no dia anterior;
- 60 minutos no quarto dia;
- 2970 minutos no total dos m dias.

Determine o valor de m .

3. Na Figura 1, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma reto $[ABCDEFGH]$, de bases $[ABCD]$ e $[EFGH]$.

Sabe-se que:

- as bases do prisma são trapézios retângulos;
- o ponto A tem coordenadas $(4, -4, -3)$, e o ponto B tem a ordenada igual ao dobro da abcissa;
- uma equação da reta BC é $(x, y, z) = (3, 5, 1) + k(2, 3, 6)$, $k \in \mathbb{R}$.

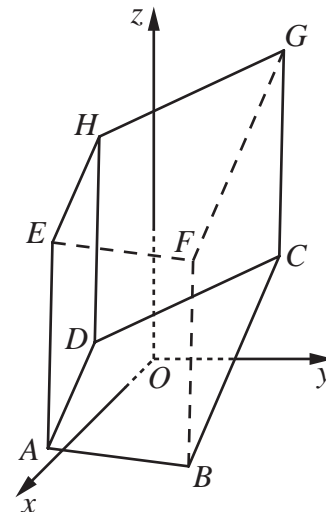


Figura 1

- * 3.1. Qual das equações seguintes é uma equação do plano ABF ?

- (A) $2x + 3y + 6z + 22 = 0$ (B) $2x + 3y + 6z - 20 = 0$
 (C) $3x - 2y - 20 = 0$ (D) $3x - 2y + 22 = 0$

- * 3.2. Determine, sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, a amplitude do ângulo convexo AOB .

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

- 3.3. Seleccionam-se, ao acaso, dois vértices de cada uma das bases do prisma.

Determine a probabilidade de os quatro vértices seleccionados não pertencerem a uma mesma face lateral do prisma.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

4. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine o conjunto dos números reais que verificam a condição $\ln^2 x - \ln x - 2 < 0$.

Apresente a sua resposta na forma de intervalo ou de reunião de intervalos de números reais.

5. Considere, para um certo valor de k real, a função g , de domínio \mathbb{R} , definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{e^{x-1}-1} - e^{x-k} & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 3x - 2 \ln x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Resolva os itens 5.1. e 5.2. sem recorrer à calculadora.

- * 5.1. Estude, no intervalo $]1, +\infty[$, a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

- * 5.2. Sabe-se que a função g é contínua em $x = 1$.

Determine o valor de k .

- * 6. O gráfico da Figura 2 apresenta a distribuição das classificações finais, em valores, na disciplina de Português, dos 20 alunos de uma turma.

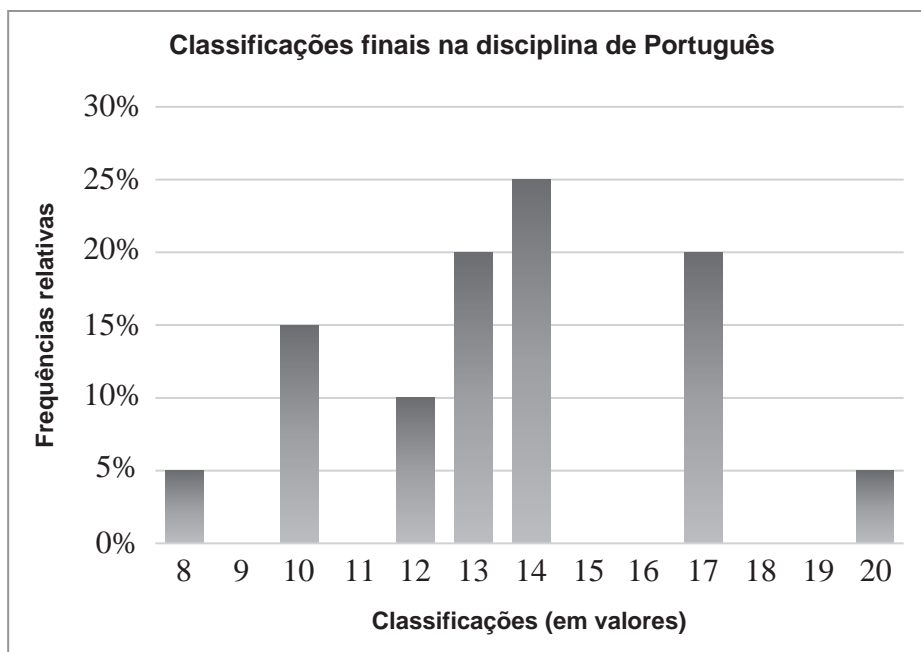


Figura 2

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados representados no gráfico da Figura 2.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

Na turma, há **I** alunos com classificação final inferior a 13 valores na disciplina de Português.

A mediana da distribuição das classificações finais na disciplina de Português é **II** valores.

A classificação média final na disciplina de Português é **III** valores, e o desvio padrão desta distribuição, arredondado às décimas, é **IV** valores.

I	II	III	IV
a) 4	a) 12,5	a) 13,4	a) 2,9
b) 6	b) 13	b) 13,6	b) 3,8
c) 10	c) 13,5	c) 13,8	c) 4,1

7. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^4}$$

Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais ao seu gráfico e, caso existam, escreva as respectivas equações.

* 8. Seja f uma função de domínio \mathbb{R} .

Sabe-se que:

- para qualquer número real a , $a \neq 2$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$;
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$, com $f(2) > 0$, e $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$;
- $f(1) \times f(3) < 0$.

Considere as proposições seguintes.

- O teorema de Bolzano-Cauchy permite afirmar que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]1, 3[$.
- A reta de equação $x = 2$ é assíntota ao gráfico da função $\frac{1}{f}$.

Justifique que as proposições I e II são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

9. Na Figura 3, estão representadas, em referencial o.n. Oxy , a circunferência de centro em O e raio 2 e uma região sombreada composta pelo trapézio $[OBCD]$, retângulo em C e em D , e pelo sector circular correspondente ao ângulo orientado AOB , de amplitude α , em radianos, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, e raio \overline{OA} .

Sabe-se que:

- o ponto A pertence à circunferência e ao semieixo positivo Ox ;
- os pontos B e C pertencem à circunferência, sendo C o simétrico de B , em relação ao eixo Oy .

Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de α , pela expressão

$$2\alpha + 3 \sin(2\alpha)$$

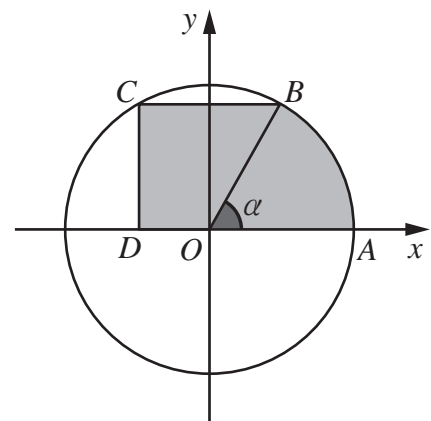


Figura 3

- * 10. Na Figura 4, está representada uma caixa que vai ser puxada ao longo de um plano horizontal, com recurso a uma haste rígida.

Nesta figura, o segmento de reta $[AB]$ representa a haste rígida, o ponto A representa o ponto em que a haste está fixada à caixa, e o ponto B representa o ponto em que vai ser exercida a força que permite deslocar a caixa.

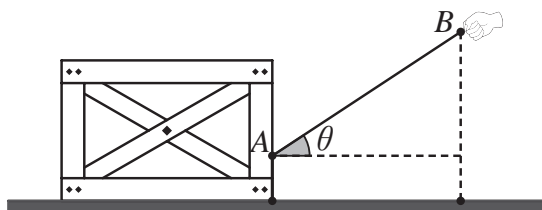


Figura 4

Seja θ a amplitude, em radianos, do ângulo que a força faz com a horizontal $\left(\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

Admita que, para cada valor de θ , a intensidade mínima da força a aplicar no ponto B , para que se inicie o movimento da caixa, é dada, em newton, por

$$F(\theta) = \frac{4095}{5 \sin \theta + 12 \cos \theta}$$

Existem dois valores distintos de θ aos quais corresponde a mesma intensidade mínima da força, em newton, a aplicar no ponto B , para que se inicie o movimento da caixa.

Sabe-se que um desses valores é o dobro do outro.

Seja θ_1 o menor desses valores $\left(\theta_1 \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\right)$.

Determine, recorrendo à calculadora, o valor de θ_1 .

Apresente o resultado em radianos, arredondado às centésimas.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação.

- * 11. Na Figura 5, está representado, no plano complexo, o triângulo $[ABC]$, cujos vértices pertencem à circunferência de raio 2 centrada na origem do referencial, sendo o ponto A pertencente ao semieixo imaginário negativo.

Os pontos A , B e C são os afijos das raízes cúbicas de um certo número complexo, w .

Em qual das seguintes opções se apresenta w , escrito na forma trigonométrica?

- (A) $2e^{i\frac{\pi}{2}}$ (B) $2e^{i\frac{3\pi}{2}}$
 (C) $8e^{i\frac{\pi}{2}}$ (D) $8e^{i\frac{3\pi}{2}}$

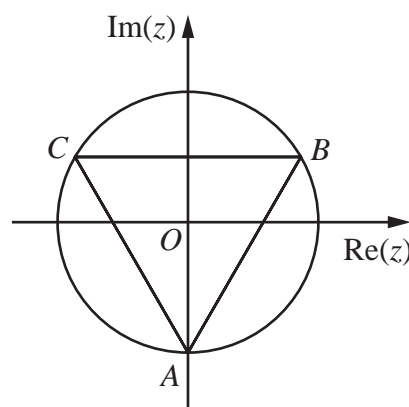


Figura 5

12. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere o número complexo $z = \frac{4}{1+i} - \frac{2}{i^7}$.

Determine o número complexo w tal que o número complexo $z \times w$ tenha módulo $5\sqrt{2}$ e afixo pertencente à bissetriz do terceiro quadrante.

Apresente w na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

- * 13. Para certos valores reais de b e de m , não nulos, a reta de equação $y = mx + 1$ é tangente ao gráfico da função quadrática definida por $f(x) = 2x^2 + bx + 5$ num ponto cuja abcissa é positiva.

Determine a abcissa desse ponto.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.	2.1.	2.2.	3.1.	3.2.	5.1.	5.2.	6.	8.	10.	11.	13.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	14	12	12	14	14	14	12	14	14	12	14	158
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	2.3.		3.3.		4.		7.		9.		12.		Subtotal
Cotação (em pontos)	3 x 14 pontos												42
TOTAL													200