

**Exame Final Nacional de Matemática A**  
**Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2020**

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho | Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

8 Páginas

---

A prova inclui 4 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final (itens **5.1.**, **5.2.**, **7.1.** e **7.2.**). Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

---

---

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---

# Formulário

---

## Geometria

### Comprimento de um arco de circunferência:

$\alpha r$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

**Área de um polígono regular:**  $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

### Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

**Área lateral de um cone:**  $\pi r g$  ( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

**Área de uma superfície esférica:**  $4\pi r^2$  ( $r$  – raio)

**Volume de uma pirâmide:**  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

**Volume de um cone:**  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

**Volume de uma esfera:**  $\frac{4}{3}\pi r^3$  ( $r$  – raio)

## Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão  $(u_n)$ :

**Progressão aritmética:**  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:**  $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

## Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen} a \cos b + \text{sen} b \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos} a \cos b - \text{sen} a \text{sen} b$

## Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$  ( $k \in \{0, \dots, n-1\}$  e  $n \in \mathbb{N}$ )

## Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u v)' = u' v + u v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\text{sen } u)' = u' \cos u$$

$$(\text{cos } u)' = -u' \text{sen } u$$

$$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

## Limites notáveis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

1. Considere a sucessão  $(u_n)$  de termo geral  $u_n = \frac{8n-4}{n+1}$

1.1. Estude a sucessão  $(u_n)$  quanto à monotonia.

1.2. Seja  $f$  a função, de domínio  $]-\infty, 8[$ , definida por  $f(x) = \log_2(8-x)$

A que é igual  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n)$  ?

(A)  $-\infty$                       (B) 0                      (C) 1                      (D)  $+\infty$

2. Quatro pessoas vão escolher, cada uma e em segredo, um dos seguintes números: 1, 2, 3, 4 e 5

Qual é a probabilidade de exatamente duas delas escolherem o número 5 ?

(A) 0,1530                      (B) 0,1532                      (C) 0,1534                      (D) 0,1536

3. Um saco contém bolas azuis e bolas brancas, indistinguíveis ao tato. Cada bola tem uma única cor e só existem bolas azuis e bolas brancas no saco.

3.1. Retiram-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas do saco.

Sejam  $A$  e  $B$  os acontecimentos:

$A$  : «A primeira bola retirada é azul»

$B$  : «A segunda bola retirada é branca»

Sabe-se que  $P(A \cap B) = \frac{1}{3}P(A)$

Justifique que inicialmente existia um número ímpar de bolas azuis no saco.

**Sugestão:** comece por designar por  $a$  o número de bolas azuis e por  $b$  o número de bolas brancas que existiam inicialmente no saco.

3.2. Considere que se alterou a constituição inicial do saco e que, neste, estão agora oito bolas azuis e sete bolas brancas.

Pretende-se colocar todas estas bolas em dez caixas numeradas de 1 a 10, de tal forma que:

- cada caixa com número par tenha, pelo menos, uma bola azul;
- cada caixa com número ímpar tenha, pelo menos, uma bola branca;
- cada caixa tenha, no máximo, duas bolas.

Nestas condições, de quantas maneiras diferentes podem ficar colocadas as bolas nas dez caixas?

(A) 1176                      (B) 2520                      (C) 28 016                      (D) 30 550

4. Seja  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos.

4.1. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

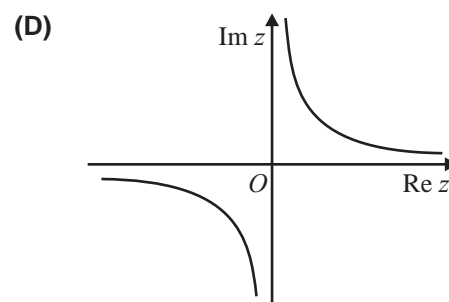
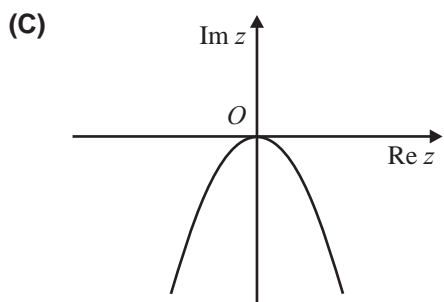
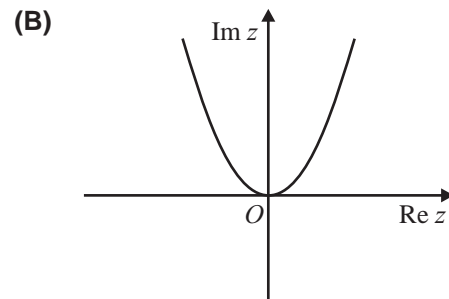
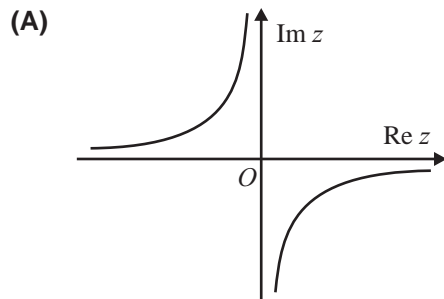
Considere, em  $\mathbb{C}$ , a equação  $z^2 = \bar{z}$

Sabe-se que, no plano complexo, os afixos dos números complexos não nulos que são soluções desta equação são os vértices de um polígono regular.

Determine o perímetro desse polígono.

4.2. Considere, em  $\mathbb{C}$ , a condição  $\operatorname{Re}(z) \times \operatorname{Im}(z) = 1$

Em qual das opções seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?



5. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n.  $Oxyz$ , um cilindro reto.

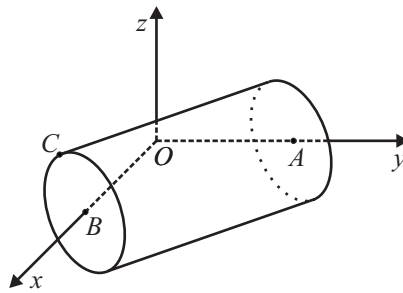


Figura 1

Sabe-se que:

- o ponto  $A$  pertence ao eixo  $Oy$  e é o centro de uma das bases do cilindro, e o ponto  $B$  pertence ao eixo  $Ox$  e é o centro da outra base;
- o ponto  $C$  pertence à circunferência de centro  $B$  que delimita uma das bases do cilindro;
- o plano  $ABC$  é definido pela equação  $3x + 4y + 4z - 12 = 0$

Resolva os itens 5.1. e 5.2. sem recorrer à calculadora.

5.1. Determine  $\overline{BC}$ , sabendo que o volume do cilindro é igual a  $10\pi$

5.2. Seja  $P$  o ponto de coordenadas  $(3, 5, 6)$

Determine as coordenadas do ponto do plano  $ABC$  que se encontra mais próximo do ponto  $P$

6. Na Figura 2, estão representados, num referencial o.n.  $xOy$ , os pontos  $S$ ,  $T$  e  $U$  e a reta  $r$  de equação  $y = 2x + 4$

Sabe-se que:

- os pontos  $S$  e  $T$  são, respetivamente, os pontos de intersecção da reta  $r$  com os eixos  $Oy$  e  $Ox$
- o ponto  $U$  pertence ao eixo  $Ox$  e tem abcissa inferior à do ponto  $T$

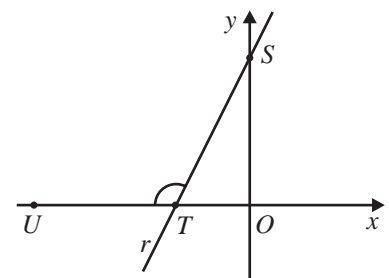


Figura 2

Qual dos valores seguintes é o valor, aproximado às centésimas, da amplitude, em radianos, do ângulo  $STU$ ?

(A) 4,25

(B) 2,68

(C) 2,03

(D) 1,82

7. O mecanismo de manivela-biela é composto por uma manivela de comprimento fixo, que efetua um movimento de rotação (sempre no mesmo sentido), e por uma biela, também de comprimento fixo, que transforma esse movimento de rotação no movimento alternado de translação de um pistão.

Na Figura 3, está representado esse mecanismo.

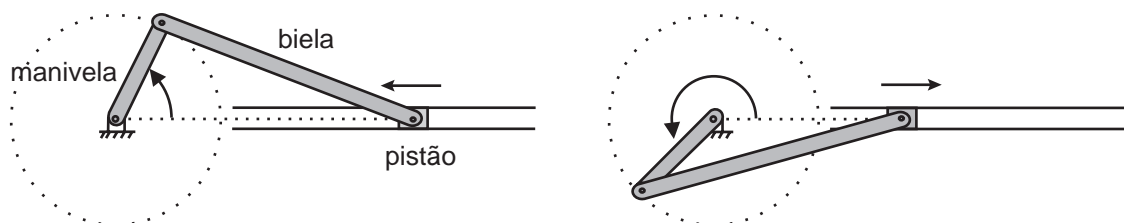


Figura 3

Na Figura 4, está representado um esquema do mecanismo descrito.

Relativamente a esta figura, sabe-se que:

- o ponto  $P$  representa o pistão;
- o segmento de reta  $[OM]$  representa a manivela, que tem 1 cm de comprimento;
- o segmento de reta  $[MP]$  representa a biela;
- os pontos  $A$  e  $B$  são os pontos em que a distância do pistão ao centro de rotação da manivela,  $O$ , é mínima e máxima, respetivamente;
- os pontos  $O$ ,  $A$ ,  $P$  e  $B$  são colineares.

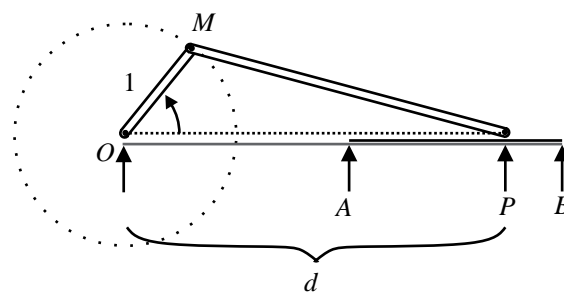


Figura 4

Sabe-se que o movimento de rotação da manivela se inicia quando o pistão se encontra na posição  $B$  e que a manivela descreve voltas completas a uma frequência angular constante.

Admita que a função que dá, em centímetros, a distância do pistão ao ponto  $O$ , em função do tempo,  $t$ , em segundos, contado a partir do instante em que é iniciado o movimento, é dada por

$$d(t) = \cos t + \sqrt{9 - \sin^2 t}, \quad t \geq 0$$

(o argumento das funções seno e cosseno está expresso em radianos)

7.1. Qual é, em centímetros, o comprimento da biela neste mecanismo?

- (A) 2                      (B) 3                      (C) 4                      (D) 5

**7.2.** Durante os primeiros cinco segundos, após o início do movimento, registou-se, num certo instante  $t_0$ , a distância do pistão ao ponto  $O$

Sabe-se que, dois segundos após esse instante, a distância do pistão ao ponto  $O$  diminuiu 25%.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a distância, em centímetros, arredondada às décimas, do pistão ao ponto  $O$  no instante  $t_0$ , sabendo-se que este valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;
- apresente o valor pedido em centímetros, arredondado às décimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

**8.** Na Figura 5, estão representados, num referencial o.n.  $xOy$ , a circunferência trigonométrica, a reta  $r$  de equação  $x = 1$ , e um ponto  $A$ , de ordenada  $a$  ( $a > 1$ ), pertencente à reta  $r$

Está também representada a semirreta  $\hat{O}A$ , que intersecta a circunferência trigonométrica no ponto  $B$

Qual das expressões seguintes dá, em função de  $a$ , a abcissa do ponto  $B$ ?

(A)  $\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$

(B)  $\sqrt{a^2 + 1}$

(C)  $\frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}$

(D)  $\sqrt{a^2 - 1}$

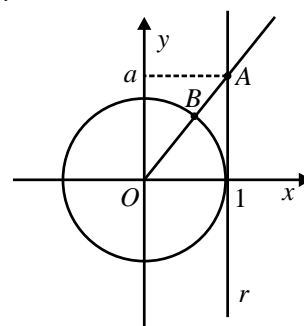


Figura 5

**9.** Seja  $f$  a função definida em  $]-\infty, 2]$  por  $f(x) = x + \ln(e^x + 1)$

Resolva os itens **9.1.** e **9.2.** sem recorrer à calculadora.

**9.1.** O gráfico de  $f$  tem uma assíntota oblíqua.

Determine uma equação dessa assíntota.

**9.2.** A equação  $f(x) = 2x + 1$  tem uma única solução.

Determine essa solução e apresente-a na forma  $-\ln k$ , com  $k > 0$

9.3. Seja  $h$  a função definida em  $]-\infty, 2]$  por  $h(x) = f(x) - x$

Qual das expressões seguintes pode ser a expressão analítica da função  $h^{-1}$ , função inversa de  $h$ ?

(A)  $e^x - 1$

(B)  $1 - e^x$

(C)  $\ln(e^x - 1)$

(D)  $\ln(1 - e^x)$

10. Seja  $g$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \frac{\text{sen } x}{1 - e^x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x^2 \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens 10.1. e 10.2. sem recorrer à calculadora.

10.1. Averigue se a função  $g$  é contínua em  $x = 0$

10.2. Estude a função  $g$  quanto à monotonia em  $]0, +\infty[$  e determine, caso existam, os extremos relativos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

**FIM**

**COTAÇÕES**

As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	<b>5.1.</b>				<b>5.2.</b>				<b>7.1.</b>			<b>7.2.</b>		<b>Subtotal</b>	
Cotação (em pontos)	16				20				16			20		<b>72</b>	
Destes 14 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	<b>1.1.</b>	<b>1.2.</b>	<b>2.</b>	<b>3.1.</b>	<b>3.2.</b>	<b>4.1.</b>	<b>4.2.</b>	<b>6.</b>	<b>8.</b>	<b>9.1.</b>	<b>9.2.</b>	<b>9.3.</b>	<b>10.1.</b>	<b>10.2.</b>	<b>Subtotal</b>
Cotação (em pontos)	8 x 16 pontos														<b>128</b>
<b>TOTAL</b>															<b>200</b>